Faktorisieren

Prawin Rajasena

31.03.2109

Design-Update: 31.01.2020

Inhaltsverzeichnis

Als Faktorisieren bezeichnet man das Umformen Polynomen zu Multiplikationen. Dies wird vor allem gebraucht um Rechenaufwand bei Rechnungen zu verringern. Zum Beispiel beim Kürzen von Brüchen. Es gibt mehrere Methoden Polynome zu faktorisieren. Hier wird in jedem der vier Kapitel eine Methode gezeigt.

1 Ausklammern

Die einfachste Methode ist das ausklammen. Es ist das Gegenteil zum ausmultiplizieren mit dem Distributivgesetz($a \cdot (b + c) = ab + ac$). Man sollte immer zuerst diese Methode auswählen, wenn möglich. Man muss jedes Glied durch den grössten gemeinsamen Teiler teilen. Ein Beispiel:

$$3x^2 + 6xy - 12x^3$$

$$3x \cdot (x + 2y - 4x^2)$$

Man beachte, dass die Vorzeichen stimmen. Denn man kann auch negative Zahlen ausklammern, was man bei der zweiten Methode häufig anwendet.

$$4a - 2b + 18c$$

$$-2(-2a + b - 9c)$$

2 Ausklammern in Teilsummen

Kann man einen Term mittels der ersten Methode nicht faktorisieren kann, könnte die zweite helfen. Beim Ausklammern in Teilsummen faktorisiert man nicht den ganzen Term auf einmal, sonder klammert ihn in Schritten aus. Hierzu ein Beispiel:

$$ax + ay + bx + by$$

$$a(x + y) + b(x + y)$$

$$(a + b)(x + y)$$

In diesem Beispiel waren die Glieder schon gruppiert, jedoch muss man sie manchmal zuerst umstellen um weiterzurechnen.

$$2x^3 - 3x^2 - 8x^2 + 12x + 2x - 3$$

$$2x^3 - 8x^2 + 2x - 3x^2 + 12x - 3$$

$$2x(x^2 - 4x + 1) - 3(x^2 - 4x + 1)$$

$$(2x - 3)(x^2 - 4x + 1)$$

Was auch noch auffällt, ist, dass -3 ausgeklammert wurde und nicht 3. Hätte man 3 ausgeklammert, wären die Zahlen in beiden Klammer gleich, die Vorzeichen aber genau umgekehrt. Man hätte deshalb auch $-2x$ und 3 ausklammern können und wäre dann auf $(-2x + 3)(-x^2 + 4x - 1)$ gekommen, was beim ausmultiplizieren das Gleiche geben würde.

3 Binomische Formeln

3.1 Erste und zweite binomische Formel

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Dies sind die ersten zwei binomischen Formel, welche wir benutzen, um Summen oder Differenzen zu quadrieren. Man kann sie deshalb umgekehrt zum Faktorisieren brauchen:

$$4x^2 - 12x + 9$$

Man sieht zwei Quadrate vorne ($4x^2 = (2x)^2$) und hinten ($9 = 3^2$). In der Mitte steht das Doppelprodukt ($-12x = 2 \cdot 2x \cdot 3$). Das heisst:

$$4x^2 - 12x + 9 = (2x-3)^2$$

3.2 Dritte binomische Formel

$$9x^2 - 49$$

Man sieht die Differenz von zwei Quadraten. Nach der dritten binomischen Formel weiss man, dass dies die Summe mal die Differenz zwei gleicher Zahlen ist ($(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$):

$$9x^2 - 49 = (3x)^2 - 7^2$$
$$(3x-7)(3x+7)$$

4 Klammeransatz

Diese Methode wird benutzt, wenn man ein Trinom (Polynom mit 3 Gliedern) hat. Dieses Trinom ist das Produkt von zwei Binomen, bei dem zwei Glieder vereinfacht werden konnten. Zum Beispiel:

$$(x-6)(x+3)$$
$$x^2 \underbrace{+3x - 6x}_{-3x} -18$$
$$x^2 - 3x - 18$$

Vom Ausmultiplizieren weiss man, dass $6 = 3 \cdot 2$ und -3 (der Koeffizient mit Vorzeichen von $-3x$) $= -6 + 3$ ist und $x \cdot x = x^2$. Man braucht also zwei Klammern haben:

$$(...) \cdot (...)$$

Und ein Produkt von x^2 haben:

$$(x...)(x...)$$

Und die zwei Zahlen haben, deren Summe -3 und deren Produkt -18 ist:

$$(x+3)(x-6)$$

Für die bessere Verständnis folgt ein zweites Beispiel:

$$u^2 + u - 6$$

Es werden zwei Klammern mit u benötigt:

$$(u...)(u...)$$

Und nun braucht es zwei Zahlen, deren Produkt dem Koeffizienten von u (1) entspricht und deren Summe -6 ist. Um auf die Zahlen zu kommen, schaut man sich die Teiler von -6 an:

$$-6 = -1 \cdot 6$$

$$-6 = -6 \cdot 1$$

$$-6 = -2 \cdot 3$$

$$-6 = -3 \cdot 2$$

Man erkennt, dass -2 und 3 zusammen 1 ergeben. Das Vorzeichen der -2 wird mit in die Klammer genommen.

$$(u-2)(u+3)$$

4.1 Satz von Vieta

Besonders wenn man grosse Zahlen hat, ist es mühsam alle Teiler herauszufinden und Teiler zu finden. Um dies zu vermeiden, ist es hilfreich den Satz des Vieta zu benutzen. Dieser ist nützlich um Gleichungssysteme in der Form

$$x + y = p$$

$$x \cdot y = q$$

zu lösen.Um den Satz zu nutzen lösen formt man die quadratische Gleichung, die zu faktorisieren ist, um. Beim mittlerem Glied (bei dem die Variable ohne Potenz vorkommt, beim Trinom $x^3 - 3x - 18$ wäre dies $3x$, da x^3 eine Potenz hat.) dreht man das Vorzeichen um:

$$y^2 \underbrace{+4y} -221$$

$$y^2 - 4y - 221$$

Man löst nun diese quadratische Gleichung mit der pq- oder abc-Formel:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$a = 1, b = -4, c = -221$$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 1 \cdot -221}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm 30}{2}$$

$$x_1 = (4 - 30) : 2 = -13$$

$$x_2 = (4 + 30) : 2 = 17$$

Nun hat man die Zahlen −13,17, die man einsetzen kann.

$$(y - 13)(y + 17)$$

5 Anwenden mehrerer Methoden

Beim Faktorisieren von längeren Termen müssen oft mehrere der obigen Methoden angewendet werden. Hier sind 4 Aufgaben (aus sos-mathe.ch) mit Lösungen auf der nächsten Seite:

1. $n^2(4n + n) + (4n + 4)^2$
2. $p(3w + 3) + (p - 5)(2w + 2)$
3. $3a^3 - 6a^2 - 24a$
4. $m^2 - q^2 + 10q - 25$

1. $n^2(4n+n)+(4n+4)^2$
Es fällt auf, dass beide Glieder Vielfache von $(4n+4)$ sind $((4n+4)^2=(4n+4)(4n+4))$. Deshalb kann der Faktor ausgeklammert werden.

$$(n^2+(4n+4))(4n+4)$$

In der ersten Klammer stehen zwei Quadrate das Doppelprodukt, also kann man die erste binomische Formel anwenden. In der zweiten Klammer kann man 4 ausklammern.

$$(n+2)^2\cdot 4(n+1)=4(n+1)(n+2)^2$$

2. $p(3w+3)+(p-5)(2w+2)$
In zwei Klammer kann $(w+1)$ ausgeklammert werden.

$$3p(w+1)+(p-5)2(w+1)$$

Dieser Faktor kann auch ausgeklammert werden, da er auf beiden Seiten vorkommt. Anschliessend vereinfacht man innerhalb der ersten Klammer.

$$(3p+2(p-5))(w+1)$$
$$(5p-10)(w+1)$$

3. $3a^3-6a^2-24a$
$3a$ kann ausgeklammert werden.

$$3a(a^2-2a-8)$$

Die Klammer kann mittels Klammeransatz weiter zerlegt werden. Die Faktoren sind 2 und -4

$$3(a+2)(a-4)$$

4. $m^2-q^2+10q-25$
Man sieht zwei Quadrate, zu denen $10q$ gut passen würde. Jedoch sind $-q^2$ und -25 beide negativ. Man kann also -1 ausklammern und dann die 2. binomische Formel anwenden.

$$m^2-(q^2-10q+25)$$
$$m^2-(q-5)^2$$

Nun hat man die Differenz von zwei Quadraten, welche der dritten binomischen Formel entspricht.

$$(m^2-q+5)(m^2+q-5)$$

6 Summen und Differenzen von Potenzen

6.1 Differenzen von Potenzen

Die Differenz von Quadraten ($a^2 - b^2$) ist zerlegbar. Aber auch Terme in der Form $a^n - b^n$ kann man faktorisieren:

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^4 - b^4 = (a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3) = (a-b)[a^2(a+b)+b^2(a+b)] = (a-b)(a+b)(a^2+b^2)$$

oder:

$$= (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) = (a-b)(a+b)(a^2+b^2)$$

$$a^5 - b^5 = (a-b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$$

$$...$$

Man sieht dass das Produkt immer einen Faktor $(a - b)$ hat. Danach kommt eine Klammer, in der jeder Summand ein aus a^x und b^x besteht. Der Exponent bei der Variable a nimmt von links nach rechts immer 1 ab (a^4, a^3, a^2,...). Der Exponent von b nimmt dagegen immer 1 zu ($b^0 = 1$, $b^1 = b$, b^2, ...). Dieses Muster wird mathematisch so aufgeschrieben:

$$\sum_{x=1}^{n}(a^{n-x} \cdot b^{x-1})$$

6.2 Summen von Potenzen

Differenzen von Potenzen mit gleichen Exponenten sind immer zerlegbar. Die Summe von Potenzen mit ungeraden Exponenten auch. Das Muster ist das Gleiche wie bei den Differenzen, jedoch steht in der ersten Klammer $(a + b)$ statt $(a - b)$ und jeder zweiter Summand ist hier negativ.

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^5 + b^5 = (a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$$

$$a^7 + a^7 = (a+b)(a^6 - a^5b + a^4b^2 - a^3b^3 + a^2b^4 - ab^5 + b^6)$$