Lineare Funktionen

Prawin Rajasena

28.01.2020

1 Definition und Eigenschaften

Eine Funktion ist eine Zuordnungsregel von Elementen von der Definitionsmenge D auf die Wertemenge W. Für jedes $x \in \mathbb{D}$ existier genau ein $y \in \mathbb{W}$. Diese Zuordnungen und Werte können auf einem Koordinatensystem dargestellt werden bei dem die x-Achse die Definitionsmenge wiedergibt und die y-Achse die Wertemenge. Dies nennt man einen Graph.

Eine lineare Funktion hat eine Zuordnungsfunktion in der Form von

$$f\colon y = mx + q$$

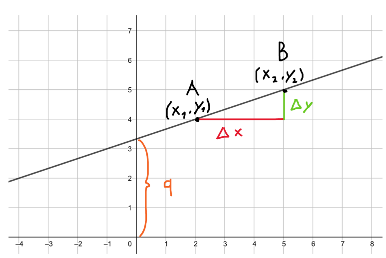
bei der $m, q \in \mathbb{R}$ und bei der m die Steigung und q der y-Achsenabschnitt ist. Die Steigung ist definiert als Höhenunterschied pro Wegunterschied oder bei der linearen Funktion

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Δx ist der Abstand zweier Punkte auf der Geraden auf der x-Achse und Δy auf der y-Achse. Der y-Achsenabschnitt ist der Abschnitt zwischen dem Ursprung des Koordinatensystems und dem Schnittpunkt der Funktion und der y-Achse. Die Funktionsgleichung kann nach

$$q = y - mx$$

aufgelöst werden. Aus zwei bekannten Punkten auf der Funktion kann die Steigung m berechnet werden. Wenn man dann noch die Koordinatenwerte (x,y) eines Punktes einsetzt, kann q berechnet werden. Aus m und q folgt dann die vollständige Funktionsgleichung. Anschaulich wird dies mit folgender Grafik für eine allgemeine lineare Funktion.



Auf dem Bild sind zwei Punkte A und B zu sehen, die zusammen mit dem Graph das Steigungsdreieck bilden. Die Punkte haben die Koordinaten (x_1, y_1) und (x_2, y_2). Mit diesen Koordinaten lässt sich

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

berechnen. Wegen den Strahlensätzen ist in allen Steigungsdreiecken die Steigung gleich.

1.1 Sonderfälle

Zwei Sonderfälle entstehen, wenn m oder q gleich null sind. Die Funktion

$$f\colon y = q$$

ist parallel zur x-Achse und hat den Abstand q. Diese Funktionen werden auch konstante Funktionen genannt. Die Funktion

$$f\colon y = mx$$

geht durch den Ursprung des Koordinatensystems, da sie keinen y-Achsenabschnitt hat. Bei diesen Funktionen muss lediglich ein Steigungsdreieck gezeichnet werden, um die Funktionsgleichung zu berechnen.

2 Berechnungen

2.1 Gerade aus zwei Punkten

Gegeben seinen zwei Punkte A und B mit den Koordinaten $(x_1, y_1) = (2, 5)$ und $(x_2, y_2) = (4, 2)$. Zu berechnen sei die Funktionsgleichung der Gerade $\overline{AB}$.

Zeichnet man das Steigungsdreieck wird ersichtlich, dass die Steigung

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - 5}{4 - 2} = -\frac{3}{2}$$

und die Funktion in der Form $f\colon y = -\frac{3}{2}x + q$ sein muss. Mit dem Punkt A (oder auch B) kann das fehlende

$$q = y_1 - mx_1 = 5 - \left(-\frac{3}{2} \cdot 2\right) = 8$$

berechnet werden. Aus m und q folgt dann, dass

$$f\colon y = -\frac{3}{2}x + 8$$

2.2 Schnittpunkt zweier Geraden

Seien $f\colon y = 3x - 2$ und $g\colon y = -\frac{1}{2}x + 5$ zwei Geraden. Gesucht sind die Koordinaten (x, y) des Schnittpunkts P.

Der Punkt lässt sich mithilfe der Gleichung $f = g$ berechnen. Es folgt, dass

$$y = 3x - 2 = -\frac{1}{2}x + 5$$

Löst man diese Gleichung dann nach x auf, so erhält man die x-Koordinate $x = 2$. Um die y-Koordinate zu bekommen, setzt man x in f (oder auch g) ein und bekommt

$$y = 3x - 2 = 3 \cdot 2 - 2 = 4$$

Also ist der Schnittpunkt

$$P = (2, 4)$$

2.3 Parallele durch Punkt

Gegen sind eine Funktion $f\colon y = 3x - 2$ und der Punkt $P = (3, 2)$. Gesucht ist eine parallele Gerade g zu f, die den Punkt P schneidet.

Da f und g parallel sind, müssen sie die gleiche Steigung $m = 3$ haben. Da der Punkt P auf g liegt, können in die Funktionsgleichung m, x und y eingesetzt werden.

$$y = 2 = mx + q = 3 \cdot 3 + q$$

Die Gleichung $2 = 3 \cdot 3 + q$ kann nach

$$q = 2 - 3 \cdot 3 = -7$$

aufgelöst werden. Aus m und q ergibt sich

$$g\colon y = 3x - 7$$